★
Exercice 1 — Voir correction

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

★
Exercice 2 — Voir correction

Soit A une matrice carrée de taille n telle que $A^4 = I_n$ et $A^3 \neq A$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

★
Exercice 3 — Voir correction

Soit ϕ l'application qui à tout polynôme $P(X)$ associe le polynôme $\phi(P) = P(X) - (X-1)P'(X) + \dfrac{(X-1)^2}{2}P''(X)$.

1) Pour tout entier positif n, montrer que ϕ définit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[x]$. déterminer son noyau.
2) On se place dans cette question uniquement dans le cas $n = 2$:déterminer la matrice représentative de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) En fonction de n, combien ϕ admet-il de valeurs propres distinctes ?

★
Exercice 4 — Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB est diagonalisable.

1) Montrer que si A ou B est inversible, alors BA est diagonalisable.
2) Si A et B ne sont pas inversible, a-t-on toujours ce résultat ?

★ ★
Exercice 5 — Voir correction

Soit a un réel non nul et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1/a & 1 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

On fixe un entier $n \geq 1$ et $2n$ réels $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ (certains d'entre eux peuvent être nuls).
On note M la matrice $(a_i b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

2) Montrer que $M = A$ pour des paramètres n, a_i et b_j à préciser.
3) Donner les valeurs propres de M (et leur multiplicité) en fonction des a_i et des b_j dans le cas général, et indiquer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de M.

★ ★
Exercice 6 — Voir correction

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = [(X^2-1)P']'$$

1) Calculer la matrice de f dans la base canonique.
2) Déterminer les valeurs propres de f.
3) Montrer que f est diagonalisable.

★ ★
Exercice 7 — Voir correction

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ tel que $\operatorname{rg}(f) \leq 1$ et $f^3 + f = 0$.

1) Montrer que 0 est l'unique valeur propre de f.
2) On suppose que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   a) Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$
   b) En déduire une contradiction. Conclure.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8 **Voir correction**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - 5u^2 + 6u = 0$. Étudier la diagonalisabilité de u.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 9 **Voir correction**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E, de rang $n-1$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $0 \leq \dim(\mathrm{Im}(u^k)) - \dim(\mathrm{Im}(u^{k+1})) \leq 1$
Indication : appliquer le théorème du rang à la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^k)$
2) Montrer que s'il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) = \mathrm{Ker}(u^{k_0+1})$, alors $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) = E$.
3) En déduire que la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(u^k)))_{0\leqslant k\leqslant n}$ forme une suite strictement croissante, puis que $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
4) Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont les $\mathrm{Ker}(u^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

⋆ ⋆
Exercice 10 **Voir correction**

On appelle **matrice stochastique** une matrice carrée à coefficients positifs telle que la somme des coefficients de chaque ligne soit égale à 1.

$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice stochastique si $\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \ a_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [\![1, n]\!], \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \end{cases}$.

1) Montrer que si A, B sont deux matrices stochastiques, alors AB est stochastique.
2) Montrer que si A est une matrice stochastique, alors 1 est valeur propre de A.
3) Montrer que toute valeur propre λ de A vérifie $|\lambda| \leqslant 1$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11 **Voir correction**

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et I la matrice identité de taille n.

1) Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $AB - BA = \alpha I$, alors A et B commutent.
2) Soit $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   a) Montrer que si W est diagonalisable, alors $\mathrm{tr}(W) \neq 0$
   b) Montrer que si $\mathrm{tr}(W) \neq 0$, alors W est diagonalisable.
   c) Montrer que si la trace de W est nulle, alors $W^2 = 0$
3) On suppose que $V = AB - BA$ est de rang 1. Montrer que pour tout entier k, $VA^kV = 0$. On pourra commencer par montrer que $(VA^k)^2 = 0$.

Le coin des khûbes

⋆
Exercice 12 **Voir correction**

(D'après ESCP 2024)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note Id_E l'application identité de E.

1) Soit p un projecteur de E, c'est à dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$
   b) Déterminer les valeurs propres de p.
2) Soit p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. On pose $f = p + q$.
   a) Déterminer $f^3 - 3f^2 + 2f$.
   b) En déduire les valeurs propres possibles de f.
3) a) Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\}$.
   b) Montrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\}$.

⋆ ⋆

Exercice 13 — Voir correction

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $A^k B - BA^k = kA^k$
2) L'ensemble des matrices nilpotentes forme-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3) Montrer que A est nilpotente en étudiant l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto MB - BM$.

⋆ ⋆

Exercice 14 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et a et b deux réels **distincts**. on note Id_E l'application identité de E. Dans tout l'exercice, f désigne un endomorphisme de E vérifiant :

$$f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = 0 \tag{1}$$

1) Quelles sont les homothéties vérifiant la relation (1) ?
2) a) Déterminer une condition suffisante portant sur les deux réels a et b pour que f soit bijective. Calculer alors f^{-1}.
   b) On suppose que f n'est pas une homothétie. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les deux réels a et b pour que f soit un projecteur.

On suppose désormais que f n'est **pas** une homothétie.

3) a) Déterminer deux réels λ et μ tels que $f = \lambda(f - a\mathrm{Id}_E) + \mu(f - b\mathrm{Id}_E)$
   b) En déduire qu'il existe deux projecteurs p et q tels que $f = bp + aq$ et $p \circ p = p \circ q = 0$
4) On suppose désormais que a et b sont non nuls. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^n = b^n p + a^n q \tag{2}$$

   Pour tout entier $n > 0$ si f est bijective, on définit f^{-n} par $f^{-n} = (f^{-1})^n$. La relation (2) est-elle vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 15 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini.

1) Soit u un endomorphisme diagonalisable de E. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.
2) Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. Montrer que u et v possèdent une base commune de diagonalisation, c'est à dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont toutes deux diagonales.
3) Soit f un endomorphisme inversible de E tel que f^2 et f^3 sont diagonalisables. Montrer que f est diagonalisable.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 : L'idée est de d'abord diagonaliser A.
$\det(A-XI) = (-5-X)(-2-X)-18 = X^2+7X-8 = (X+8)(X-1)$. Ce trinôme a deux racines : $X_1 = -8$ et $X_2 = 1$, donc A a deux valeurs propres distinctes, 1 et -8. On en déduit que A est diagonalisable, donc qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$. En posant $B = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$, on a donc $B^3 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^3 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}P^{-1} = A$.

Correction de l'exercice 2 : X^4-1 est un polynôme annulateur de A et $X^4-1 = (X^2-1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$. Ses seules racines sont -1 et 1 donc ce sont les seules valeurs propres possibles de A.
Élever au carré une matrice diagonale avec seulement des -1 et des 1 sur la diagonale donne la matrice identité, Si A était diagonalisable, A^2 serait semblable à I_n donc égale à I_n. L'égalité $A^2 = I_n$ donnerait ensuite $A^3 = A$, ce qui contredit les hypothèses de l'énoncé. On en conclut que A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 3 :

1) Toutes les dérivées d'un polynôme sont des polynômes, un produit et une somme de polynôme est un polynôme donc si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\phi(P)$ est un polynôme et on a : $\deg((X-1)P'(X)) = \deg(X-1) + \deg(P'(X)) \leq 1+n-1 \leq n$ et $\deg(\frac{(X-1)^2}{2}P''(X)) = \deg\left(\frac{(X-1)^2}{2}\right) + \deg(P''(X)) \leq 2+n-2 \leq n$, donc par somme $\deg(\phi(P)) \leq n$ donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.
2) Dans le cas $n = 2$, une base possible de $\mathbb{R}_2[x]$ est $(1, X, X^2)$. On a $\phi(1) = 1$, $\phi(X) = X - (X-1) = 1$ et $\phi(X^2) = X^2 - 2X(X-1) + 2\frac{(X-1)^2}{2} = -X^2+2X+X^2-2X+1 = 1$. La matrice de ϕ dans cette base est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3) On peut constater que si P est de degré $k \leq n$, alors $\phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à k. Ainsi, dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, la matrice de ϕ est triangulaire supérieure et ses valeurs propres se lisent alors sur la diagonale.

$$\forall k \in [\![, 2, n]\!], \quad \phi(X^k) = X^k - k(X-1)X^{k-1} + k(k-1)\frac{X^2-2X+1}{2}X^{k-2}$$

Le terme de degré k de $\phi(X^k)$ est donc $1 - k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2-3k+2}{2}$.
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x^2-3x+2)$ a pour dérivée $f'(x) = x - \frac{3}{2}$ donc est strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Ainsi, les valeurs $\frac{k^2-3k+2}{2}$ sont toutes distinctes lorsque k parcours $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
De plus,$f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, et on savait déjà que 0 et 1 était valeur propre grâce à la question précédente. $f(2) = 0$ redonne la valeur propre 0 et $f(3) = 1$ redonne la valeur propre 1. À partir de $k = 4$ on a $f(k) \geq 3$ donc on obtient uniquement de nouvelles valeurs propres
En conclusion, les valeurs propres de ϕ sont $\left\{\frac{k^2-3k+2}{2}\ ,\ k \in [\![2, n]\!]\right\}$, cet endomorphisme possède donc$n-1$ valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 4 :

1) Supposons A inversible, alors $BA = A^{-1}ABA$ donc BA est semblable à AB. Puisque AB est diagonalisable, BA est semblable à une matrice diagonalisable donc diagonalisable.
(En effet, il existe P inversible et D diagonale telles que $AB = PDP^{-1}$ donc $BA = A^{-1}PDP^{-1}A = (P^{-1}A)^{-1}D(P^{-1}A)$).
De même, supposons B inversible, alors $BA = BABB^{-1}$ donc BA est semblable à AB, donc est diagonalisable.
2) Si A et B ne sont pas inversible ce résultat n'est plus vrai. On a par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc AB est diagonale donc diagonalisable, mais $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. BA n'est pas diagonalisable : en effet elle est triangulaire supérieure avec uniquement des 0 sur la diagonale. Si elle était diagonalisable elle aurait pour seule valeur propre 0 donc serait égale à la matrice nulle.
Dans cet exemple AB est donc diagonalisable mais BA ne l'est pas.

Correction de l'exercice 5 :

1) On remarque que les trois colonnes de A sont colinéaires à la première, en la multipliant par a et par a^2.

Ainsi, A est de rang 1 donc son noyau est de dimension 2. De plus, on remarque que $A\begin{pmatrix}a^2\\a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a^2\\3a\\3\end{pmatrix}=3X$ donc $X=\begin{pmatrix}a^2\\a\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

La somme des dimensions des sous espaces propres associés aux valeurs propres 3 et 0 est supérieure ou égale à 3 donc A est diagonalisable.

2) Pour $n=3$ et $(a_1,a_2,a_3)=(1,a,a^2)$ et $(b_1,b_2,b_3)=(1,1/a,1/a^2)$ (c'est à dire $a_i=a^{i-1}$ et $b_j=a^{1-j}$) on a $a_ib_j=a^{i-j}$ et donc on a bien $A=(a_ib_j)_{1\le i,j\le n}$.

3) Si $M=0$, elle est diagonalisable avec pour seule valeur propre 0.

Sinon, M est de rang 1 car toutes ses colonnes sont de la forme $b_j\cdot\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ donc toutes colinéaires. Ainsi 0 est valeur propre de M de multiplicité $n-1$.

Raisonnons par analyse synthèse : soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et supposons qu'il existe $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX=\lambda X$

Puisque $\mathrm{Im}(M)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\right)$ et que $\lambda X\in\mathrm{Im}(M)$ alors $X\in\mathrm{Im}(M)$, il existe donc un réel μ tel que $X=\mu\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$.

On a alors

$$MX=\mu\cdot\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_1b_ja_j\\\sum_{j=1}^n a_2b_ja_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^n a_nb_ja_j\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^n b_ja_j\begin{pmatrix}\mu a_1\\\mu a_2\\\vdots\\\mu a_n\end{pmatrix}=\mathrm{tr}(M)\cdot X$$

donc la valeur propre associée à X est $\mathrm{tr}(M)$.

Réciproquement, le même calcul montre que $\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\mathrm{tr}(M)$.

En conclusion, il y a trois cas possibles :

— Ou bien $\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=0$, auquel cas $M=0$ donc M est diagonalisable.

— Ou bien $\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\neq 0$, et $\mathrm{tr}(M)\neq 0$, auquel cas M admet deux valeurs propres : 0, de multiplicité $n-1$, et $\mathrm{tr}(M)$, de multiplicité 1, et donc M est diagonalisable.

— Ou bien $\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\neq 0$, $\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\neq 0$, et $\mathrm{tr}(M)=0$. Dans ce cas, la seule valeur propre de M est 0 mais M n'est pas la matrice nulle, donc M n'est pas diagonalisable.

Ainsi M est diagonalisable si et seulement si $M=0$ ou si $\mathrm{tr}(M)\neq 0$.

Correction de l'exercice 6 :

1) Pour $P=1$, $P'=0$ donc $f(P)=0$
Pour $P=X$, $P'=1$ donc $f(P)=(X^2-1)'=2X$
Pour $P=X^2$, $P'=2X$ donc $f(P)=(2(X^2-1)X)'=4X^2+2(X^2-1)=6X^2-2$
Pour $P=X^k$, $P'=kX^{k-1}$ donc $f(P)=(k(X^2-1)X^{k-1})'=2kXX^{k-1}+k(k-1)(X^2-1)X^{k-2}=(k+k^2)X^k-(k^2-k)X^{k-2}$.

2) Dans la base canonique, la matrice de f est une matrice triangulaire supérieure :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & k^2+k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n^2+n \end{pmatrix}$$

dont les coefficients diagonaux sont $(k^2+k)_{0\leq k\leq n}$. Ainsi, $sp(f) = \{k^2+k \mid k \in [\![0,n]\!]\}$.

3) Les valeurs propres de f sont toutes distinctes car la suite $(k^2+k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (différentes façon de le montrer : montrer que $u_{n+1} - u_n > 0$, montrer que $x \mapsto x^2 + x$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, etc...). La matrice de f est de taille $n+1$ et elle a $n+1$ valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.

Correction de l'exercice 7 :

1) $X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f. Comme $X^3 + X = X(X^2+1)$, sa seule racine est 0 donc la seule valeur propre possible de f est 0.

   Comme f est de rang 0 ou 1 et que $\dim(E) \geq 2$, alors le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 1$ donc 0 est valeur propre de f.

2) Supposons $f \neq 0$

   a) Si f est de rang 0, alors $f = 0$ et le résultat est évident. Si f est de rang 1, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(x_0)$. De plus, $f(x_0) \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe λ_0 tel que $f(x_0) = \lambda_0 x_0$. Or 0 est la seule valeur propre de f donc $\lambda_0 = 0$. Ainsi, $f(x_0) = 0$ donc pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe μ tel que $y = \mu x_0$ et $f(y) = \mu f(x_0) = 0$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

   b) Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ et ainsi $f^2(x) = 0$. On a donc $f^2 = 0$ donc $f^3 = 0$ et donc $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $f \neq 0$.

   On en conclut que le seul endomorphisme f de E vérifiant $\mathrm{rg}(f) \leq 1$ et $f^3 + f = 0$ est l'endomorphisme nul.

Correction de l'exercice 8 : On remarque que $u^3 - 5u^2 + 6u = u \circ (u^2 - 5u + 6\mathrm{id}) = u \circ (u - 2\mathrm{id}) \circ (u - 3\mathrm{id})$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(u \circ (u-2\mathrm{id}) \circ (u - 3\mathrm{id})) = \mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$.

Première Méthode (avec $\dim(\mathrm{Ker}(f\circ g)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$:

Montrons préalablement que si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\dim(\mathrm{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$:

La restriction $f_{|\mathrm{Im}(g)}$ de f à $\mathrm{Im}(g)$ vérifie $\mathrm{Im}(f_{|\mathrm{Im}(g)}) = \mathrm{Im}(f \circ g)$, si on applique le théorème du rang à $f_{|\mathrm{Im}(g)}$ on obtient donc :

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(g)) &= \mathrm{rg}(f_{|\mathrm{Im}(g)}) + \dim(\mathrm{Ker}(f_{|\mathrm{Im}(g)})) \\ n - \dim(\mathrm{Ker}(g)) &= \mathrm{rg}(f\circ g) + \dim(\mathrm{Ker}(f_{|\mathrm{Im}(g)})) \\ n - \dim(\mathrm{Ker}(g)) &= n - \dim(\mathrm{Ker}(f\circ g)) + \dim(\mathrm{Ker}(f_{|\mathrm{Im}(g)})) \end{aligned}$$

d'où $\dim(\mathrm{Ker}(f\circ g)) = \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Ker}(f_{|\mathrm{Im}(g)}))$. Or $\mathrm{Ker}(f_{|\mathrm{Im}(g)}) \subset \mathrm{Ker}(f)$ (car $x \in \mathrm{Ker}(f_{|\mathrm{Im}(g)}) \Rightarrow f_{|\mathrm{Im}(g)}(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$), d'où l'inégalité voulue.

D'après le cours, $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{id})$ sont en somme directe (avec éventuellement certains des ces sous-espaces vectoriels réduits à $\{0\}$). On a donc

$$\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{id}) \subset E \tag{1}$$

et puisque la somme est directe on a $\dim(\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u-3\mathrm{id})) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id})) + \dim(\mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{id}))$.

D'après l'inégalité sur les noyaux montrée (qui s'étend par récurrence immédiate à une composition de plusieurs endomorphismes) :

$$\dim(\mathrm{Ker}(u \circ (u-2\mathrm{id}) \circ (u - 3\mathrm{id})) \leq \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id})) + \dim(\mathrm{Ker}(u-3\mathrm{id}))}_{=\dim(\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}(u-3\mathrm{id}))} \tag{2}$$

Or $u \circ (u - 2\mathrm{id}) \circ (u - 3\mathrm{id}) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(u \circ (u-2\mathrm{id}) \circ (u-3\mathrm{id})) = \mathrm{Ker}(0) = E$ et donc l'inégalité (2) donne

$$\dim(E) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u-3\mathrm{id})) \leq \dim(E)$$

Donc toutes ces inégalités sont des égalités et l'inclusion **(1)** est une égalité. Ainsi, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id})$ donc u est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, 2, 3\}$.
Remarque : On peut appliquer cette méthode dès lors qu'on dispose d'un polynôme annulateur de u qui est **scindé à racines simples**, c'est à dire qui s'écrit sous la forme $\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ avec tous les λ_k distincts.

Seconde méthode (par analyse-synthèse) : Soit $x \in E$. On cherche à écrire x sous la forme $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(u)$, $x_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})$ et $x_3 \in \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{id})$. Supposons que ce soit le cas et appliquons u, on obtient

$$u(x) = 0 + 2x_2 + 3x_3$$

en appliquant de nouveau u :

$$u^2(x) = 4x_2 + 9x_3$$

On résout le système $\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 &= u(x) \\ 4x_2 + 9x_3 &= u^2(x) \end{cases}$ et on trouve $\begin{cases} x_2 &= \dfrac{1}{2}(3u(x) - u^2(x)) \\ x_3 &= \dfrac{1}{3}(-2u(x) + u^2(x)) \end{cases}$.

Réciproquement, si on pose $x_2 = \dfrac{1}{2}(3u(x) - u^2(x))$, $x_3 = \dfrac{1}{3}(-2u(x) + u^2(x))$ et $x_1 = x - x_2 - x_3 = x - \dfrac{5}{6}u(x) + \dfrac{1}{6}u^2(x)$, alors

$$u(x_2) - 2x_2 = \frac{1}{2}(3u^2(x) - u^3(x)) - 3u(x) + u^2(x) = \frac{1}{2}(-u^3(x) + 5u^2(x) - 6u(x)) = 0 \quad \text{car } u^3 - 5u^2 + 6u = 0$$

<u>on a bien $x_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})$.</u>

$$u(x_3) - 3x_3 = \frac{1}{3}(-2u^2(x) + u^3(x)) + 2u(x) - u^2(x) = \frac{1}{3}(u^3(x) - 5u^2(x) + 6u(x)) = 0$$

<u>on a bien $x_3 \in \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{id})$</u>

$$u(x_1) = u(x) - \frac{5}{6}u^2(x) + \frac{1}{6}u^3(x) = \frac{1}{6}(u^3(x) - 5u^2(x) + 6u(x)) = 0$$

<u>On a bien $x_1 \in \mathrm{Ker}(u)$.</u>
Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}) + \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{id})$, donc $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{id})$, u est donc diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0; 2; 3\}$.

Correction de l'exercice 9 :

1) On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u^k)) - \dim(\mathrm{Im}(u^{k+1})) \geq 0$.
Considérons la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^k)$ et appliquons le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(u^k)) &= \mathrm{rg}(u_{|\mathrm{Im}(u^k)}) + \dim(\mathrm{Ker}(u_{|\mathrm{Im}(u^k)})) \\ &= \mathrm{rg}(u^{k+1}) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u^k)) \end{aligned}$$

Or $\mathrm{rg}(u) = n - 1$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u^k)) \leq 1$, d'où le résultat.

2) Supposons qu'il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) = \mathrm{Ker}(u^{k_0+1})$.
Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k)$: $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ pour $k \geq k_0$

— **Initialisation :** La propriété est vraie pour $k = k_0$ par hypothèse
— **Hérédité :** Supposons la propriété vraie pour un rang k. On sait que $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+2})$, montrons l'inclusion réciproque :
soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+2})$. Alors $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ mais $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$ par hypothèse de récurrence, donc $u^k(u(x)) = 0$, autrement dit $u^{k+1}(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u^{k+2}) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$
— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $k \geq k_0$ on a $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$

Or on sait que u est nilpotente donc $u^n = 0$, et $\mathrm{Ker}(u^n) = \mathrm{Ker}(0) = E$, donc $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) = E$.

3) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ donc la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(u^k)))_{0 \leq k \leq n}$ est croissante. Supposons qu'elle ne soit pas strictement croissante, alors il existe un rang $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(u^{k_0})) = \dim(\mathrm{Ker}(u^{k_0+1}))$, donc $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) = \mathrm{Ker}(u^{k_0+1})$. On en déduit d'après la question précédente que $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) = E$.
Ainsi d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u^{k_0})) = 0$. Mais $\mathrm{rg}(u) = n - 1$ et le rang de u^k ne décroit au plus que de 1 en 1 d'après la question 1. On ne peut donc avoir $\dim(u^k) = 0$ que pour $k \geq n$. Contradiction, donc la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(u^k))_{0 \leq k \leq n}$ est strictement croissante.
Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(u^0)) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{id})) = 0$ et que $\dim(\mathrm{Ker}(u^n)) = n$, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$.

4) Les $\mathrm{Ker}(u^k)$ sont stables par u
Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. $u_{|F}$ est aussi nilpotente donc en prenant $k = \dim(F)$ on a $u_{|F}^k = 0$. Ainsi, $F \subset \mathrm{Ker}(u^k)$, et puisque $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$ on en conclut par égalité des dimensions que $F = \mathrm{Ker}(u^k)$. Ainsi, les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont bien les $\mathrm{Ker}(u^k)$.

Correction de l'exercice 10 :

1) Supposons que $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont deux matrices stochastiques. Posons $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = AB$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$ donc $c_{i,j} \geq 0$ comme somme de termes positifs, et

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^n c_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \underbrace{\sum_{j=1}^n b_{k,j}}_{=1} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{i,k} && \text{car } B \text{ est stochastique} \\
&= 1 && \text{car } A \text{ est stochastique}
\end{aligned}$$

donc $C = AB$ est stochastique.

2) 1est valeur propre de A pour le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Soit λ une valeur propre de A. Alors il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$, ce qui se traduit par

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = \lambda x_i$$

Choisissons $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$ et appliquons la valeur absolue à l'égalité précédemment obtenue :

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}x_j\right| = |\lambda| \times |x_{i_0}|$$

donc par inégalité triangulaire :

$$|\lambda| \times |x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j}|x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j}|x_{i_0}|$$

par définition de i_0, et car pour tout (i,j), $a_{i,j} \geq 0$. Puisque $\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} = 1$, on en déduit finalement que $|\lambda| \times |x_{i_0}| \leq |x_{i_0}|$. Or x_{i_0} est nécessairement non nul car $X \neq 0$. On en déduit finalement que $|\lambda| \leq 1$.

Correction de l'exercice 11 :

1) Si $AB - BA = \alpha I$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(\alpha I) = n\alpha$. Or, $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$ donc nécessairement $\alpha = 0$ et on a alors $AB - BA = 0$ donc $AB = BA$.

2) a) Supposons W diagonalisable. Puisque W est de rang 1, donc 0 est valeur propre de W et le sous-espace propre associé, $\mathrm{Ker}(W)$, est de dimension $n-1$. W a donc au plus une autre valeur propre λ, et $\lambda \neq 0$ sinon W serait nulle donc de rang 0. Le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1 donc il existe une matrice inversible P telle que $W = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 \cdots & & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $\mathrm{tr}(W) = \lambda \neq 0$.
b) Supposons que $\mathrm{tr}(W) \neq 0$

Soit $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'application canoniquement associée à W. $\mathrm{Im}(w)$ est de dimension 1 donc si $e_1 \in \mathrm{Im}(w)$ est non nul on peut le compléter en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de w est de la forme $W' = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ avec $(w_1, w_2, \dots, w_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ et W est donc semblable à cette matrice.

Deux matrices semblable ont la même trace donc $\mathrm{tr}(W) = w_1$. Si $\mathrm{tr}(W) \neq 0$, alors $w_1 \neq 0$ donc w_1 est une valeur propre non nulle de W' donc de W (car W' est triangulaire supérieure). On en déduit que W est diagonalisable car $\dim(\mathrm{Ker}(W)) = n-1$ et $\dim(E_{w_1}) \geq 1$.

c) Si $\mathrm{tr}(W) = 0$, alors $w(e_1) = 0$ et puisque $\forall k \geq 2$, $w(e_k) = w_k \cdot e_1$ on a $w^2(e_k) = w_k \cdot w(e_1) = 0$. Puisque w^2 est nulle sur une base de $\mathbb{R}^n$ elle est nulle sur $\mathbb{R}^n$, donc $W^2 = 0$.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$. V est de rang 1 donc VA^k est de rang inférieur ou égal à 1. Si VA^k est de rang 0, alors $VA^kV = 0$ et il n'y a plus rien à montrer.

Supposons donc que VA^k est de rang 1 alors on peut appliquer les résultats de la question 2. Puisque $\mathrm{tr}(VA^k) = \mathrm{tr}(ABA^k - BA^{k+1}) = \mathrm{tr}(ABA^k) - \mathrm{tr}(BA^{k+1}) = \mathrm{tr}(BA^{k+1}) - \mathrm{tr}(BA^{k+1}) = 0$, on a $(VA^k)^2 = 0$ d'après la question 2)c).

Cela implique que $\mathrm{Im}(VA^k) \subset \mathrm{Ker}(VA^k)$.

Puisque V est de rang 1 et que $\mathrm{Im}(VA^k) \subset \mathrm{Im}(V)$, on a $\mathrm{Im}(V) = \mathrm{Im}(VA^k)$ par égalité des dimensions, donc $\mathrm{Im}(V) \subset \mathrm{Ker}(VA^k)$ d'où $VA^kV = 0$.

Correction de l'exercice 12 :

1) a) Si $x \in \mathrm{Im}(p)$, alors il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$ donc $p(x) = p^2(x') = p(x') = x$, et donc $(p - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, alors $p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(p)$. On a donc bien $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

b) $X^2 = X$ est un polynôme annulateur de p, donc les valeurs propres possible de p sont 0 et 1. On a $p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si sa seule valeur propre est 0, $p = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si sa seule valeur propre est 1, et lorsque $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{Id}_E$ alors p est diagonalisable avec comme valeurs propres 0 et 1 car $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

2) a) Comme p et q commutent on a directement $f^3 = p^3 + 3p^2 \circ q + 3p \circ q^2 + q^3 = p + 6p \circ q + q$ car $p^2 = p$ et $q^2 = q$. De même : $f^2 = p^2 + 2p \circ q + q^2 = p + 2p \circ q + q$, donc finalement :

$$\begin{aligned} f^3 - 3f^2 + 2f &= p + 6p \circ q + q - 3(p + 2p \circ q + q) + 2(p + q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) D'après la question précédente, $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$ est un polynôme annulateur de f, et $P(X) = X(X^2 - 3X + 2) = X(X-1)(X-2)$. Ses racines sont 0, 1 et 2 donc les valeurs propres possibles de f sont 0, 1 et 2.

3) a) Si 0 est valeur propre de f, alors il existe $x \in E$, $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = 0$ donc $p(x) + q(x) = 0$ (*). En composant par p on obtient $p(x) + p(q(x)) = p(x) + q(p(x)) = 0$, et en composant par q on obtient $q(p(x)) + q(x) = 0$, donc finalement :

$$p(x) + q(p(x)) = q(p(x)) + q(x) = 0$$

d'où $p(x) = q(x)$ donc en reprenant (*) : $2p(x) = 2q(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ et finalement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\}}$$

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ avec $x \neq 0_E$, alors $f(x) = p(x) + q(x) = 0$ donc 0 est valeur propre de f.

b) Si 2 est valeur propre de f, alors il existe un vecteur x de E, $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = p(x) + q(x) = 2x$ (*).
En composant d'une part par p, d'autre part par q on obtient :

$$p(x) + p(q(x)) = 2p(x) \quad \text{et} \quad p(q(x)) + q(x) = 2q(x)$$

d'où

$$p(x) = p(q(x)) \quad \text{et} \quad q(x) = p(q(x))$$

donc $p(x) = q(x)$, d'où en reprenant (*) : $2p(x) = 2q(x) = 2x$ et finalement $p(x) = x$ et $q(x) = x$, donc $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ d'où :

$$\boxed{\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}}$$

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ avec $x \neq 0_E$, alors $p(x) = x$ et $q(x) = x$ car p et q sont des projecteurs donc on a bien $f(x) = p(x) + q(x) = 2x$ donc 2 est valeur propre de f.

Correction de l'exercice 13 :

1) Pour $k=0$ on a :

$$A^kB - BA^k = B - B = 0 \quad \text{et} \quad kA^k = 0$$

donc l'égalité est vraie pour $k=0$.
Si elle est vraie pour un entier k, alors

$$\begin{aligned} kA^{k+1} &= A(A^kB - BA^k) \\ &= A^{k+1}B - ABA^k \end{aligned}$$

Or on a $AB = A + BA$ d'après l'égalité de départ donc :

$$\begin{aligned} &= A^{k+1}B - (A+BA)A^k \\ &= A^{k+1}B - BA^{k+1} - A^{k+1} \end{aligned}$$

d'où $A^{k+1}B - BA^{k+1} = kA^{k+1} + A^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$.

2) Non, par exemple pour $n=2$ si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = B^2 = 0$ et pourtant $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas, donc l'ensemble des matrices nilpotentes n'est pas stable par addition.

3) φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (facile) et d'après la question 1), A^k est valeur propre de φ associé à la valeur propre k pour tout entier k.
Si on avait $A^k =\neq 0$ pour une infinité de valeurs de k, alors φ aurait une infinité de valeurs propres distinctes correspondant à ces valeurs de k. Ceci est impossible donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

Correction de l'exercice 14 :

1) Supposons que f est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant la relation (1).
On a $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ donc $f^2 = \lambda^2 \mathrm{Id}_E$ et ainsi :

$$\begin{aligned} f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = 0 &\Longrightarrow (\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab)\mathrm{Id}_E = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0 \\ &\Longrightarrow (\lambda - a)(\lambda - b) = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda = a \quad \text{ou} \quad \lambda = b \end{aligned}$$

donc $\lambda \in \{a;b\}$. Réciproquement, si $\lambda = a$ alors $f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = (a^2 - (a+b)a + ab)\mathrm{Id}_E = 0$ et de même si $\lambda = b$.
Les homothéties qui vérifient (1) sont donc les homothéties de rapport a ou b.

2) La relation (1) est équivalente à $f \circ (f - (a+b)\mathrm{Id}_E) = -ab\mathrm{Id}_E$. Si a et b sont non nuls, alors $ab \neq 0$ et on peut écrire :

$$f \circ \frac{-1}{ab}(f - (a+b)\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$$

donc f est inversible et $f^{-1} = \dfrac{-1}{ab}(f - (a+b)\mathrm{Id}_E)$.

3) Raisonnons par analyse synthèse : si f est un projecteur, alors $f^2 = f$ donc la relation (1) donne :

$$(1-a-b)f + ab\mathrm{Id}_E = 0$$

Si $a+b \neq 1$, alors $f = -\dfrac{ab}{1-a-b}\mathrm{Id}_E$ donc f est un homothétie. On a donc nécessairement $a+b=1$ et la relation 1 donne $ab\mathrm{Id}_E = 0$ donc $a=0$ ou $b=0$.
On a donc nécessairement $(a,b) \in \{(1,0);(0,1)\}$.
Réciproquement, supposons que $a=1$ et $b=0$, alors la relation (1) donne :

$$f^2 - f = 0$$

donc f est un projecteur.

4) Raisonnons par analyse-synthèse : supposons que λ et μ sont deux réels tels que $f = \lambda(f - a\mathrm{Id}_E) + \mu(f - b\mathrm{Id}_E)$. Alors :

$$(1 - \lambda - \mu)f + (\lambda a + \mu b)\mathrm{Id}_E = 0$$

or f n'est pas une homothétie donc la famille (Id_E, f) est libre donc

$$\begin{cases} 1 - \lambda - \mu &= 0 \\ \lambda a + \mu b &= 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit que $\boxed{\lambda = \dfrac{b}{b-a}}$ et $\boxed{\mu = \dfrac{a}{a-b}}$ (car a et b sont distincts).
Réciproquement, on a bien :

$$\begin{aligned} \frac{b}{b-a}(f - a\mathrm{Id}_E) + \frac{a}{a-b}(f - b\mathrm{Id}_E) &= \left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a}\right) f + \left(\frac{-ab}{b-a} + \frac{-ab}{a-b}\right) \mathrm{Id}_E \\ &= f \end{aligned}$$

5) Posons $p = \dfrac{1}{b-a}(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $q = \dfrac{1}{a-b}(f - b\mathrm{Id}_E)$. On a alors :

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{(b-a)^2}(f^2 - 2af + a^2\mathrm{Id}_E) \\ &= \frac{1}{(b-a)^2}((a+b)f - ab\mathrm{Id}_E - 2af + a^2\mathrm{Id}_E) && \text{en utilisant (1) pour exprimer } f^2 \\ &= \frac{1}{(b-a)^2}((b-a)f - a(b-a)\mathrm{Id}_E) \\ &= \frac{1}{b-a}(f - a\mathrm{Id}_E) \\ &= p \end{aligned}$$

et on vérifie de même que $q^2 = q$.
On a aussi :

$$\begin{aligned} p \circ q &= \frac{-1}{(b-a)^2}(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) \\ &= 0 && \text{car } (X-a)(X-b) \text{ est un polynôme annulateur de } f \text{ d'après (1)} \end{aligned}$$

et $p \circ q = q \circ p$ car deux polynômes de l'endomorphisme f commutent.

6) La relation est vraie pour $n = 1$ d'après la question précédente et si $f^n = b^n p + a^n q$ pour un certain entier n alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= (bp + aq) \circ (b^n p + a^n q) \\ &= b^{n+1}p^2 + b\underbrace{p \circ q}_{=0} + a\underbrace{q \circ p}_{=0} + a^{n+1}q^2 \\ &= b^{n+1}p + a^{n+1}q \end{aligned}$$

donc par récurrence elle est vraie pour tout entier n.
Montrons que $f^{-1} = b^{-1}p + a^{-1}q$:

$$(b^{-1}p + a^{-1}q) \circ (bp + aq) = bb^{-1}p^2 + aa^{-1}q = p^2 + q^2 = p + q$$

Or $p + q = \dfrac{1}{b-a}(f - a\mathrm{Id}_E) - \dfrac{1}{b-a}(f - b\mathrm{Id}_E) = \dfrac{b-a}{b-a}\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$ donc $b^{-1}p + a^{-1}q$ est bien l'inverse de f, et par récurrence immédiate on montre de même que $f^{-n} = (f^{-1})^n = b^{-n}p + a^{-n}q$. La relation (1) est donc vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{Z}^*$.
Enfin, $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $b^0 p + a^0 q = p + q = \mathrm{Id}_E$

Correction de l'exercice 15 :

1) Soient $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres de u. On a alors $E = E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}$. Pour tout $k \in \{1, ..., r\}$ posons $F_k = F \cap E_{\lambda_k}$ et montrons que
$$F = F_1 + \cdots + F_r$$
Attention : dans le cas général on a $F \cap (E_1 + \cdots + E_r) \neq (F \cap E_1) + \cdots + (F \cap E_r)$ (ex avec $F = \text{Vect}\,((1,1))$, $E_1 = \text{Vect}\,((1,0))$ et $E_2 = \text{Vect}\,((0,1))$, il faut donc utiliser ici le fait que F est stable par u.
Soit $x \in F \cap (E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_r})$, alors $x = x_1 + \cdots + x_r$ avec pour tout $k \in \{1, ..., r\}$, $x_k \in E_{\lambda_k}$ et $x \in F$.
Alors $u(x) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \in F$ et $\lambda_r x = \lambda_r x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \in F$ donc en faisant la différence en obtient :
$$(\lambda_1 - \lambda_r)x_1 + \cdots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)x_r \in F$$
On réitère jusqu'à obtenir x_1 in F, puis on déduit en remontant les itérations $x_2 \in F$ et ainsi de suite jusqu'à $x_r \in F$. Ainsi on a bien $x \in (F \cap E_1) + \cdots + (F \cap E_r)$.
De plus, les (F_k) sont en somme directe car les E_{λ_k} le sont d'après le cours, donc finalement $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$.
Sur chaque F_k on a $u_{F_k} = \lambda_k \text{Id}_{F_k}$ donc F est somme de sous-espaces propres de u_F, donc u_F est diagonalisable.

2) Commençons par montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v : notons $(E_\lambda)_{\lambda \in Spec(u)}$ les sous-espaces propres de u. Soit $\lambda \in Spec(u)$, alors pour tout $x \in E_\lambda$ on a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ car u et v commutent, donc $v(x) \in E_\lambda$. Ainsi E_λ est stable par v.
Chaque restriction $v_{|E_\lambda}$ est diagonalisable sur E_λ d'après la 1ère question car v est diagonalisable. Ainsi pour chaque $\lambda \in Spec(u)$ il existe une base $\mathcal{B}_\lambda = (e_1^\lambda, ..., e_{r_\lambda}^\lambda)$ de E_λ dans laquelle v est diagonale, et tous les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de u puisqu'ils sont dans E_λ.
En regroupant toutes les bases $\mathcal{B}_\lambda$ pour toutes les valeurs de λ dans $Spec(u)$ on obtient une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonale.

3) f^2 et f^3 commutent car $f^2 \circ f^3 = f^5 = f^3 \circ f^2$, donc d'après la question 2) il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_\mathcal{B}(f^2)$ et $\text{Mat}_\mathcal{B}(f^3)$ sont diagonales. Leurs valeurs propres sont non nulles car f est inversible donc f^2 et f^3 le sont aussi.
Pour un vecteur e de la base $\mathcal{B}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$ tels que $f^2(e) = \lambda e$ et $f^3(e) = \mu e$.
Alors $f^2(e) = \lambda e \Rightarrow f^3(e) = \lambda f(e)$ donc $\mu e = \lambda f(e)$ donc $f(e) = \dfrac{\mu}{\lambda} e$. Ainsi e est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\dfrac{\mu}{\lambda}$.
La base $\mathcal{B}$ est donc une base de vecteurs propres de f, la matrice représentative de f dans cette base est donc diagonale donc f est diagonalisable.